Министерство образования Московской области

ГОУ Педагогическая академия

Проект слушателя курсов

«Актуальные проблемы преподавания математики»

учителя математики МОУ средней

общеобразовательной школы №13

г. Павловский Посад

Матвеевой Татьяны Владимировны.

Тема проекта «Прогрессии».

Научный руководитель

К.П.Н., доцент

Ерина Т.М.

Москва 2011г.

Содержание

1. Введение. 3
2. Содержание элективного курса. 4
	1. Пояснительная записка. 4
	2. Цели курса. 5
	3. Основные задачи курса. 5
	4. Знания в результате изучения курса. 7
	5. Умения в результате изучения курса. 8
	6. Тематическое содержание курса. 9
	7. Примерное планирование занятий. 10
	8. Итоговый тест. 13
3. Литература. 17
4. Приложения

 4.1 Приложение 1. Урок «Формулы суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий» 18

* 1. Приложение 2. Урок подготовки к ЕГЭ «Прогрессии».30
	2. Приложение 3. Урок «Геометрическая прогрессия». 39

Введение.

Учить не мыслям,

а м ы с л и т ь !

И. Кант

 В настоящее время поставлена задача создать систему специализированной подготовки в старших классах общеобразовательной школы, ориентированную на индивидуализацию обучения и специализацию обучающихся, в том числе с учётом реальных потребностей рынка труда, отработкой гибкой системы профилей и кооперации старшей ступени школы с учреждениями начального, среднего и высшего профессионального образования. Суть предпрофильной подготовки – создать образовательное пространство, способствующее самоопределению учащегося 9 класса, через организацию курсов по выбору, информационную работу и профильную ориентацию. Основной задачей предпрофильной подготовки в 9 классе является комплексная работа с учащимися по обоснованному и жизненно важному выбору дальнейшего пути обучения.

 Данный элективный курс «Прогрессии» имеет целью прояснить и дополнить школьный материал, связанный с прогрессиями. Материал этого курса можно использовать во время повторения материала 9 класса и подготовки к сдаче экзамена по математике.

**Пояснительная записка.**

Одна из целей обучения математике - научить учащихся решать задачи. Одно из средств повышения эффективности обучения математике - систематическое и целенаправленное формирование умений решать задачи.

Решение задач выступает и как цель и как средство обучения. Умение решать задачи является одним из основных критериев уровня математического развития обучающихся. В ходе работы над задачами формируется творческое мышление.

Решение задач на прогрессии связано с развитием логического

мышления, сообразительности, наблюдательности, а часто и непростыми преобразованиями, возникающими при решении полученных систем уравнений и неравенств. Такие задачи вызывают трудности, как у школьников, так и у абитуриентов. Это происходит от недостаточного внимания, уделяемого такого рода задачам в школьном курсе математики. Данный курс - это попытка восполнить этот пробел.

Тема «Прогрессии» изучается в курсе алгебры 9-го класса в течение 16 часов и имеет основной целью познакомить учащихся с понятиями числовой последовательности, арифметической и геометрической прогрессий, с формулами n-го члена и суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий. Материал, содержащийся в данном элективном курсе, тесно связан с программным материалом, углубляет его и позволяет помочь учащимся научиться уверенно решать как стандартные, так и нестандартные задачи, в том числе, задачи олимпиадного характера. Необходимость введения данного элективного курса обуславливается так же и тем, что задания, связанные с прогрессиями, встречаются в материалах ГИА.

Элективный курс «Прогрессии» предназначен как для учащихся, проявляющих интерес к изучению математики, так и для учащихся, желающих повысить свой уровень математической подготовки.

На изучение данного элективного курса отводится 6 часов. Курс предназначен для учащихся 9-х классов, а так же может быть использован и при подготовке учащихся 10-11 классов к ЕГЭ.

**Цель курса:** Формирование математической культуры решения задач

**Задачи:**

1) Углубление и расширение знаний, полученных на уроках.

2) Умение применять полученные знания для решения практических задач.

3) Формирование навыков анализа связей между величинами.

4) Подготовка к обучению на профильном уровне.

**Цели элективного курса:**

1. Создание целостного представления о различных видах числовых последовательностей.
2. Овладение навыками применения теоретических положений данной темы для решения задач прикладного характера.

**Основные задачи курса:**

* повторить основные понятия и формулы по теме «Прогрессии»;
* добиться эффективности применения знаний по теме «Прогрессии» в решении задач повышенного уровня сложности, задач олимпиадного характера и геометрических задач;
* овладеть элементами исследовательской работы.

Занятия могут быть организованы в виде семинаров и уроков-практикумов по решению задач. Ведущими являются групповые, индивидуальные формы работы. При направляющей роли учителя школьники могут самостоятельно выдвинуть гипотезу решения задания, провести анализ данных и определить пути решения. Всё должно располагать к самостоятельной деятельности и повышать интерес к изучению предмета.

Освоение элективного курса заканчивается итоговой проверочной работой и защитой учащимися своих творческих работ.

Школьники, изучившие данный материал, смогут применить его при решении конкурсных, прикладных задач, а также использовать в повседневной жизни в практических целях.

В данной программе представлены образцы дидактических материалов по всем темам элективного курса, а также образцы контрольно-измерительных материалов.

Задания, предлагаемые в данном элективном курсе, интересны и оригинальны в решении. Это влияет на повышение учебной мотивации учащихся и помогает им проверить свои способности к математике. Вместе с тем в курсе заложена возможность дифференцированного обучения, что позволяет различным группам школьников решать сложные математические задачи просто, красиво и понятно.

**В результате учащиеся должны овладеть следующими умениями и навыками:**

1) Решения текстовых задач на прогрессии;

2) Овладение навыками и умениями для решения нестандартных задач;

3) Приобрести навыки рассуждения, наблюдательности, умения проводить аналогии, обобщать, обосновывать, анализировать, делать выводы.

**Знания.**

**Тема: Арифметическая прогрессия**

1. Знать терминологию "последовательность", "член последовательности", "номер числа последовательности", "формула **n-го** члена последовательности".

2. Определение арифметической прогрессии.

1. Формула **n-го** числа и суммы **n** первых членов арифметической прогрессии.
2. Теоремы: любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой вида **аn** = **kn+в,** где **к и b** некоторые числа" и "Последовательность (an), заданная формулой вида аn = kn+в, где **к и** b некоторые числа, является арифметической прогрессией".

**Тема: Геометрическая прогрессия**

1.Определение геометрической прогрессии.

 2.Формулу **n-го** числа, формула суммы **n** первых членов геометрической прогрессии.

3.Следствия из определения геометрической прогрессии: отношение любого числа прогрессии, начиная со второго, к предыдущему числу равно q, и так как геометрическая прогрессия - "последовательность отличных от нуля чисел", то первый член и знаменатель прогрессии не могут быть равными нулю.

4.Формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии, которая позволяет переводить бесконечные десятичные периодические дроби в обыкновенные.

**Умения.**

**Тема: Прогрессии**

1. Дана арифметическая прогрессия (аn) : 8; 4; ... .
Найдите разность и восемнадцатый член этой прогрессии.
2. В арифметической прогрессии (хn) x1 = -5, d = 4.
Найдите сумму двадцати первых членов этой прогрессии.
3. В арифметической прогрессии (bn) b10 = 23, b1 = 5.

 Найдите разность этой прогрессии.

1. В геометрической прогрессии (уn) y1 = 64, q = ½ .

 Найдите y8.

1. Дана геометрическая прогрессия (еn): 6; 2;...
2. Найдите знаменатель и сумму первых шести членов этой прогрессии.

**Тематическое содержание курса.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Тема** | **Кол-во часов** |
|   | Вводное занятие. | 1 |
| 1. | Прогрессии в задачах с древнейших времен до наших дней. | 1 |
| 2. | Арифметическая и геометрическая прогрессия в геометрических задачах. | 2 |
| 3. | Прогрессии в материалах ГИА и ЕГЭ. Заключительное занятие. | 11 |
|   | **Итого** | **6** |

Программа содержит вводное занятие, 3 темы и заключительное занятие, связанные единой идеей. В то же время эти темы достаточно независимы друг от друга, что позволит учителю, исходя из уровня математической подготовки класса, использовать все темы или рассмотреть любую из них.

**Вводное занятие** (1 час). На этом занятии учащимся сообщаются цель, задачи элективного курса, требования к итоговому отчету и итоговой аттестации. Проводится вводная диагностика (тест) школьников по выявлению их степени подготовленности к изучению курса (с последующим обсуждением результатов диагностики).

**Тема 1** (1 час). На занятиях повторяются и систематизируются знания учащихся об арифметической и геометрической прогрессиях, рассматриваются задачи, дошедшие до нас с древнейших времен. Именно данный материал позволяет повысить мотивацию учащихся с низким и средним уровнями способностей к изучению математики.

**Тема 2** (2 часа). На занятиях демонстрируется рациональность использования теоретического материала темы «Прогрессии» для решения определенного круга геометрических задач. Красивые и эффективные выкладки при решении достаточно сложных и непонятных, на первый взгляд, геометрических задач позволят повысить учебный интерес у учащихся любого уровня математической подготовки.

**Тема 3** (1 час). Предусматривает решение заданий на прогрессии, содержащиеся в материалах ГИА и ЕГЭ. Данная тема должна помочь учащимся адекватно оценить собственные знания, умения. Однако следует так построить занятия, чтобы не допустить занижения уровня своей самооценки школьниками.

На **итоговом занятии элективного курса** (1 час) учащимся для проверки усвоения знаний предлагается проверочная работа. Заключительным этапом является защита творческих работ, содержащих самостоятельно сконструированные задачи по различным темам изучаемого элективного курса.

**Примерное планирование занятий.**

**Тема 1. Прогрессии в задачах с древнейших времен до наших дней** (1 час).

**Занятие 1.** Актуализация и систематизация знаний учащихся о числовых последовательностях, об арифметической и геометрической прогрессиях, формулах n-го члена и суммы n первых членов. Необходимо решить несколько стандартных заданий, что позволит учащимся вспомнить и обобщить свои знания по данной теме и подготовиться к углубленному изучению материала. Итогом является таблица (см. приложение), которая послужит справочным материалом для дальнейших занятий.

**Занятие 2.** Решение задач на прогрессии, встречающиеся в древних рукописях у разных народов мира.

**Тема 2. Арифметическая и геометрическая прогрессия в геометрических задачах** (2 часа).

При рассмотрении данной темы учащимся предлагается ряд геометрических задач (с квадратами, треугольниками, выпуклыми многоугольниками и т.д.), решения которых без использования темы «Прогрессии» довольно громоздки и сложны. Учителю можно продемонстрировать для сравнения два способа решения задач: 1) без использования прогрессий; 2) с использованием формул арифметической и геометрической прогрессии. Это позволит показать красоту краткости математических выкладок, а также установить межпредметные связи между алгеброй и геометрией. Целесообразно на первом занятии предложить ученикам домашнее задание поискового характера: найти в различных учебных пособиях и сборниках по геометрии задачи данного типа. На втором занятии этой темы следует провести «защиту» их оптимального способа решения (с применением темы «Прогрессии»).

**Тема 3. Прогрессии в материалах ГИА и ЕГЭ** (1 час).

Школьникам предлагаются для решения задания разного уровня сложности.

Выполнение проверочной работы.

**Итоговые занятия** (1 час).

 Итоговая диагностика.

Защита творческих работ. Подведение итогов.

Программа может считаться усвоенной учеником, если в каждой проверочной работе он решил не менее 50% предложенных задач. Учитель и ученик могут составить «таблицу успешности», куда заносятся результаты выполнения проверочных работ. Причем необходимо учитывать не только те задания, которые были правильно решены полностью, но и те, в которых школьник верно усмотрел путь решения. Особо отмечаются оригинальные способы решения.

Итоговый тест

**Арифметическая и геометрическая прогрессии.**

Вариант 1.

1. B арифметической прогрессии a5 = 8,7 и a8 = 12,3.

Найдите d и а1.

а) d = 1,6 и a1 = 2,3; в) d = 1,2 и a1 = 3,9;

б) d = 3,6 и a1 = - 5,7; г) d = 1,4 и a1 = 3,1.

2. В арифметической прогрессии а1 = - 7,3 и а2 = - 6,4. На каком месте (укажите номер) находиться число 26?

а) 39; б) 38; в) 27; г) 28.

3. В арифметической прогрессии а1 = 38,1 и а2 = 36,7. На каком месте (укажите номер) стоит первое отрицательное число? Найдите это число.

а) – 0,5; б) – 0,7; в) – 1,1; г) – 0,3.

4. Найдите сумму первых шестнадцати членов арифметической прогрессии, заданной формулой аn = 6n + 2.

а) 864; б) 848; в) 792; г) 716.

5. В геометрической прогрессии а1 = 72; а3 = 8. Найдите знаменатель q.

а) 9; б) 3; в) 1/3; г) 1/3 или – 1/3.

6. В геометрической прогрессии а1 =  и а2 = . Найдите шестой член этой прогрессии.

а) ; б) ; в) ; г) .

7. В геометрической прогрессии b1 = 0,4 и b2 = 1,2. Найдите сумму пяти первых членов этой прогрессии.

а) 18,8; б) 80,2; в) 48,8; г) 39,6.

8. Найдите первый член геометрической прогрессии, если а1 + а5 = 20 и а2 + а3 = 17.

а) 4; б) 6; в) 2; г) 8.

9. Для периодической дроби 0,42(6) найдите несократимую обыкновенную дробь. Запишите разность числителя и знаменателя.

а) 12; б) 7; в) 8; г) 11.

10. Д а н о: (bn) – геометрическая прогрессия, b1 = 3, q = 2. Какой цифрой оканчивается b20?

а) 6; б) 2; в) 8; г) 4.

**Арифметическая и геометрическая прогрессии.**

Вариант 2.

1. B арифметической прогрессии a3 = 7,5 и a7 = 14,3.

Найдите d и а1.

а) d = 6,8 и a1 = - 6,1; в) d = 1,7 и a1 = 4,1;

1. б) d = 3,4 и a1 = 0,7; г) d = 1,4 и a1 = 4,7.

2. В арифметической прогрессии а1 = - 5,6 и а2 = - 4,8. На каком месте (укажите номер) находиться число 16?

а) 14; б) 13; в) 27; г) 28.

3. В арифметической прогрессии а1 = 29,2 и а2 = 27,9. На каком месте (укажите номер) стоит первое отрицательное число? Найдите это число.

а) – 1,1; б) – 0,9; в) – 0,7; г) – 0,3.

4. Найдите сумму первых восемнадцати членов арифметической прогрессии, заданной формулой аn = 4n + 9.

а) 732; б) 846; в) 768; г) 934.

5. В геометрической прогрессии а1 = 36; а3 =9. Найдите знаменатель q.

 а) 2; б) ; в) ½ или – ½ ; г) ½ .

6. В геометрической прогрессии а1 = - и а2 = ½ . Найдите пятый член этой прогрессии.

а) ; б)40,5; в) – 13,5; г) .

7. В геометрической прогрессии b1 = - 0,3 и b2 = - 0,6. Найдите сумму шести первых членов этой прогрессии.

а) – 9,3; б) 6,3; в) 3,2; г) – 18,9.

8. Найдите первый член арифметической прогрессии, если а1 + а6 = 26 и а2 + а3 = 18.

а) 3; б) 2; в) 4; г) 1,5.

9. Для периодической дроби 0,58(3) найдите несократимую обыкновенную дробь. Запишите разность числителя и знаменателя.

а) 3; б) 7; в) 5; г) 2.

10. Д а н о: (bn) – геометрическая прогрессия, b1 = 2, q = 3. Какой цифрой оканчивается b15?

а) 6; б) 8; в) 4; г) 2.

**Литература**

1. Мордкович. А.Г. Алгебра 9кл. Задачник для общеобразовательных учреждений, М.: Мнемозина, 2009 г.

2. Мордкович А.Г. Алгебра 7 - 9кл. Методическое пособие для учителя, М:

Мнемозина, 2001г.

3. Муравин К.С. Алгебра 8 кл. Учебник для общеобразовательных учреждений. М: Дрофа, 2000 г.

4. Цьпкин А.Г., Пинский А.И. Справочник по методам решения задач по

математике для средней школы, - М: Наука, 1989 г.

5. Кострикина Н.П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7 - 9

классов, М: Просвещение, 1991 г.

6. Горнштейн П.И. И др. Задачи с параметрами. - М., Илекса, 2002

7. Мордкович А.Г. Алгебра 9. Задачник для общеобразовательных учреждений М.Мнемозина, 2009Г.

8. Сборник заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы.

9. Программы для общеобразовательных школ, гимназий и лицеев. М. 2004; изд. Дрофа.

10. Алгебра в 7 - 9 классах. Составители Макарычев Ю. Н. и др. Пособие для учителя. М. Просвещение, 1988.

11. Математика и искусство. Волошинов А. -М. Просвещение, 1992

12. Магистр рассеянных наук. М. Московский клуб. 1994

**Приложение 1.**

Урок алгебры в 9 классе по теме:

"Формулы суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессии".

«Прогрессия – движение вперед». /Боэций.

***Цели и задачи:***

образовательные - познакомить учащихся с выводом формулы суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий; научить учащихся применять полученные формулы при решении задач.

развивающие – развивать творческую и мыслительную деятельность учащихся на уроке посредством анализа и сравнения арифметической и геометрической прогрессий, вывода формул; с помощью решения задач исследовательского характера и самостоя­тельного вывода учащимися формул развивать интеллектуальные качества личности школьников, такие, как самостоятельность, гибкость, антикомформизм мышления, способность к оценочным действиям, обобщению, быстрому переключению; спо­собствовать формированию навыков коллективной и самостоятельной работы; в це­лях развития эмоций учащихся обеспечить в ходе урока ситуации эмоциональных переживаний; формировать умения четко и ясно излагать свои мысли.

воспитательные - прививать учащимся интерес к предмету посредством применения информационных технологий (с использованием компьютера), решения исторических задач; формировать умения аккуратно и грамотно выполнять матема­тические записи, составлять таблицы.

***Ход урока:***

***I. Организация начала урока.***

**Учитель:** Тема урока: «Формулы суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессии». Каким вопросам темы посвящены предыдущие уроки?

**Ученик:** а) определение арифметической прогрессии;

б) формула n – ного члена арифметической прогрессии;

в) определение геометрической прогрессии.

**Учитель:** Чему научились?

**Ученик:** применять формулы для нахождения n – ного члена арифметической и геометрической прогрессии.

**Учитель:** Как вы думаете, на какие вопросы вы должны ответить на сегодняшнем уроке, исходя из темы?

**Ученик:** Как выглядят формулы суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессии.

Как вывести формулы суммы n первых членов арифметической и геометрической профессии.

Зачем нужно уметь вычислять сумму n первых членов арифметической и геометри­ческой профессии.

В чём сходства и различия в выводе формул суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессии?

***II. Актуализация знаний.***

Учитель: итак, чтобы ответить на поставленные вопросы, решим задачу.



Задача классу:

1. Новый русский решил отгородить бассейн на даче фигурной сте­ной. Позвав строителей, начал объяснять. - В нижний ряд укладывается 19 блоков, на него кладётся 17 блоков, затем 15 и так далее. Всего 8 рядов. Выпишем числа, соответствующие количеству блоков каждого ряда: 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5 (учитель записывает числа на доске). Получили последовательность чисел. Опишите её.

**Ученик:** Эта последовательность является примером конечной убывающей арифмети­ческой прогрессии, первый член которой а1 = 19, а разность d=-2. Любой член этой прогрессии можно вычислить по формуле:

, где n - натуральные числа от 1 до 8.

2. Сформулируйте определение арифметической прогрессии.

3. Рассмотрим бесконечно убывающую арифметическую профессию, первый член, которой а1 = 19, а разность d = - 2. Какие задания вы могли бы предложить классу, используя эти данные так, чтобы они могли бы выполнить их устно? Решите составленные задачи.

**Варианты заданий:**

 - Найдите 18-й член профессии.

 - Является ли число 1 (21; - 8) членом последовательности?

 - Сколько положительных чисел являются членами этой прогрессии?

 - ему равен первый отрицательный член этой прогрессии? и т. д.
4. Придумайте арифметическую прогрессию.

5. Являются ли арифметическими прогрессиями следующие последовательности чисел (последовательности чисел заранее записаны на доске):

а)1;2;3;4;5;6;...,

б) 5; 5; 5; 5; 5;...,

в)0;0;0;0;0;...,

г) 1; 2; 22; 23; 24; 25;…263,…

6. Рассмотрим последнюю последовательность:

1; 2; 22; 23; 24; 25;…263,… Опишите её.

**Ученик:** Эта последовательность является примером бесконечной возрастающей геометрической прогрессии, первый член которой b1 = 1, а знаменатель q = 2. Любой член этой прогрессии можно вычислить по формуле:

 где n .

7. Сформулируйте определение геометрической прогрессии.

8. Придумайте геометрическую прогрессию.

9. Являются ли геометрическими прогрессиями следующие последовательности чисел: (последовательности чисел заранее записаны на доске):

а) 5; 5; 5; 5; 5;

б)0;0;0;0;0;...

***III. Поиск новых знаний.***

Учащиеся работают в четвёрках. Учитель даёт инструктаж по работе в группе.

Задания группам:

**Учитель**: Мы повторили определения и формулы n - ного члена арифметической и геометрической прогрессии, которые должны помочь нам ответить на вопросы, по­ставленные в начале урока.

количество блоков в фигурной стене? По какой формуле можно найти количество блоков в стене, если изменить количество блоков 1 ряда и число рядов. Решите зада­чу в общем виде. Ответ обоснуйте.

**Проверка выполнения задания:**

1. Группам даётся 3 минуты на обсуждение решения задачи.

2. Один из учащихся рассказывает решение задачи.

3. Остальные учащиеся внимательно выслушивают ответ, и предлагают свои, отличные от данного (если такие имеются) способы решения.

4. Учитель предлагает выслушать верное решение и сравнить его с предложенными.

**Учитель:** Вернёмся на дачу к нашим героям. Как по быстрее вычислить

количество блоков в фигурной стене? - Э,- сказал прораб Пётр Иванович,

- да стена трапецию напоминает. Площадь трапеции – полусумма оснований на высоту. А у нас нижнее основание а1 = 19, верхнее а8 = 5, высота 8 слоев, то есть 96 блоков.



**Учитель:** Рассказывают, что, когда, великий немецкий математик Карл Гаусс учился в начальной школе, преподаватель предложил ученикам самостоятель­но найти сумму ряда от 1 до 100. Он предполагал, что ученики будут складывать эти числа по порядку, на что потребуется не менее 10 минут. Какого же было его удивление, когда маленький Карл

через 1-2 минуты заявил, что он задание выполнил и дал правильный ответ. Не могли бы вы ответить на вопрос столь же быстро? Обсудите решение задачи в группах.

**Проверка выполнения задания:**

1. Группам дается 5 минут на выполнение задания.

2.Группам выделяется часть доски, на которой они записывают решения. Если решения аналогичные, то записать их может только одна из групп.

3. Обсуждаются представленные решения и оформления задач. Выделяются верные решения.

4. Учащимся предлагается записать понравившееся им решение в тетрадь.
Решение:

***I способ:*** Объяснение Гаусса: "Я заметил, что 1+100 =101, 2 +99 =101, 3 +98 = 101 и т. д. Пара ровно отстоящих от краёв ряда чисел даёт 101 и последняя пара средних чисел даёт 101 =50 + 51. Числа, взятые по паре с начала и с конца ряда встречаются в середине после 50 сложений этих пар. Поэтому надо 101 х 50 = 5050. Это число и будет суммой всех 100 чисел".

***II способ:***

S=l+2+3+4+5+6+...+97+98+99+100

S=100+99+98+97+...+6+5+4+3+2+1

2S= 101+101+101+...+101

 101 раз

2S=101x l00

S=5050

**Учитель:** Проанализировав решение предыдущих заданий, докажите что равенст­во



является формулой суммы n первых членов арифметической прогрессии.

Формула суммы членов арифметической прогрессии была доказана древнегреческим ученым Диофантом (III век).

**Проверка выполнения задания:**

1. Группам дается 7 минут на выполнение задания.

2. Учащиеся выполняют задания на листочках. По истечении времени решения сдаются учителю.

3. Учитель предлагает рассмотреть верный вывод формул и сравнить его со своим; записать вывод формулы в таблицу, заполнение которой было начато на прошлых уроках.

**Учитель:** Подставив в полученное равенство формулу n - го члена арифметиче­ской прогрессии, получите другую формулу для вычисления суммы n первых членов арифметической профессии.

Проверьте решение, сравнив его верным и, запишите его в таблицу.

Выполните задания № 369 а) и № 370 а)

**Учитель:** Древняя индийская легенда рассказывает, что когда царь Шерам узнал об удивительной игре в шахматы, он приказал позвать к себе её изобретателя - учё­ного Сету. Царь пообещал наградить бедного учёного, чем тот сам пожелает. Сета попросил награду за своё изобретение столько пшеничных зёрен, сколько получится, если на первую клетку шахматной доски положить 1 зерно, на вторую в 2 раза больше, на третью в 4 раза больше и т. д. до 64 клетке. Царь подивился такой скромности учёно­
го и велел слугам принести Сете мешок требуемой пшеницы. Слуги ушли, но выполнить работу они не смогли. Как вы думаете, почему? В этой задачи речь идёт о суммировании, известной нам, геометрической прогрессии.

S64 = l+ 2+22+ 23+ 24+ 25+... +263

Вычислите значение этой суммы.

**Проверка выполнения задания:**

1.Группам даётся 5 минут на выполнение задания.

2. Группам выделяется часть доски, на которой они записывают решения. Если решения аналогичные, то записать их может только одна из групп.

3. Обсуждаются представленные решения и оформления задач. Выделяются верные решения.

4. Учащимся предлагается записать решение в тетрадь.

Решение: Можно подсчитать, что масса такого числа пшеничных зёрен больше трил­лиона тонн. Это заведомо превосходит количество пшеницы, собранной человечест­вом до настоящего времени.

**Учитель:** Проанализировав решение предыдущей задачи, выведите формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии, если первый член этой прогрессии b1, n – ный член прогрессии bn, Sn - сумма первых п членов.

S = l+2+22+23+24+25+...+263

2S = 2+22+23+24+25+26...+264

2S-S=(2 + 22+23+24+25+26+... + 264) - (l + 2 + 22+23+24+25+...+263)

S = 264 – 1=18446744073709551615

**Проверка выполнения задания:**

1. Группам даётся 7 минут на выполнение задания.

2. Учащиеся выполняют задания на листочках. По истечении времени решения сдаются учителю.

Учитель предлагает рассмотреть верный вывод формул, сравнить его со своим; записать вывод формулы в таблицу.

**Учитель:** Итак, мы получили формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии:

 при q  1 и Sn = nb1 при q = 1. Формула суммы членов геометрической прогрессии дана в книге Евклида «Начала» (III в. до н.э.).

Подставив в первое равенство формулу n - ного члена геометрической прогрес­сии, получите другую формулу для вычисления суммы n первых членов геометриче­ской прогрессии. Проверьте решения, сравнив их с верным и запишите их в таблицу.

Таблица: "Арифметическая и геометрическая прогрессии".

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Арифметическая прогрессия | Геометрическая прогрессия |
| Примеры |  |  |
| Определение |  |  |
| Рекуррентная формула |  |  |
| Формула n – ного члена |  |  |
| Характеристическое свойство |  |  |
| Общий вид формулы n – ного члена |  |  |
| Формула суммы n первых членов |  |  |

IV. Подведение итогов урока.

Учащиеся дают ответ на вопрос: В чём сходства и различия в выводе формул суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессии? Учитель просит учащихся оценить, как они справились с работой на уроке, что было удачным, а что нет; на все ли поставленные в начале урока вопросы были найдены ответы, а какие ещё предстоит решить.

V. Информация о домашнем задании. п. 17,19, № 371, 410.

Используя таблицу, сравнить арифметическую и геометрическую прогрессии. Ре­зультат сравнения оформить в виде таблицы.

***Приложение к уроку.***

***Древнейшая прогрессия.***

Древнейшая задача на прогрессии — не вопрос о возна­граждении изобретателя шахмат, насчитывающий за собой двухтысячелетнюю давность, а гораздо более старая задача о делении хлеба, которая записана в знаменитом египетском па­пирусе Ринда. Папирус этот, разысканный Риндом в конце прошлого столетия, составлен около. 2000 лет до нашей эры и является списком с другого, еще более древнего математиче­ского сочинения, относящегося, быть может, к третьему тыся­челетию до нашей эры. В числе арифметических, алгебраиче­ских и геометрических задач этого документа имеется такая (приводим ее в вольной передаче):

Сто мер хлеба разделить между пятью людьми так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвертый больше третьего и пятый больше четвертого. Кроме того, двое первых должны получить в 7 раз меньше трех остальных. Сколько нужно дать каждому?

РЕШЕНИЕ

Очевидно, количества хлеба, полученные участниками раздела, составляют возрастающую арифметическую прогрес­сию. Пусть первый ее член х, разность у. Тогда

доля первого………….х

» второго………….х + у

» третьего…………x + 2y

» четвертого ...........х + Зу

» пятого……………х + 4у

На основании условий задачи составляем следующие два уравнения:

х + (х + у) + (х + 2у) + (х + Зу) + (а + 4у) = 100,

7[х + (х + у)] = (х + 2у) + (х + 3у) + (х + 4у).

После упрощений первое уравнение получает вид

х + 2у = 20,

 а второе

11х = 2у.

 Решив эту систему, получаем:



Значит, хлеб должен быть разделен на следующие части

.

**Приложение 2.**

**Урок подготовки к ЕГЭ. Тема: Прогрессии.**

**Цель:** Актуализировать знания о прогрессиях. Учить решать задачи на нахождение характерных элементов прогрессий.

**Методический комментарий:** в вариантах ЕГЭ всегда есть одна задача на прогрессию (арифметическую или геометриче­скую). Поскольку прогрессии изучаются в 9-м классе и больше программа по математике к ним не возвращается, даже неслож­ные задания на прогрессии вызывают у школьников большие за­труднения. Главной причиной затруднений являются эпизодич­ность в изучении этого материала и его «незадействованность» в других областях школьного курса математики. В этой связи име­ет смысл повторять прогрессии уже в конце всего цикла занятий, ближе к проведению пробного ЕГЭ, поскольку решение задачи на прогрессию требует только знания наизусть соответствующих формул (которые, как показывает опыт, обычно запоминаются школьниками достаточно плохо).

Задача на прогрессию обычно содержится в разделе В, однако никогда не бывает сложной, поэтому целесообразно ориентиро­вать школьников на ее решение. В этой связи тему «Прогрессии» в данных материалах автор относит на последние уроки повторения еще и с точки зрения «разумной целесообразности»: если по виду де­монстрационного варианта ясно, что прогрессий не будет, нет смысла тратить на них время, поскольку, по сути, тема «тупико­вая» и нигде далее школьникам не понадобится, даже в случае поступления на специальности с профилирующей математикой.

Начиная урок, полезно кратко повторить основные характер­ные черты арифметической и геометрической прогрессии и выписать все нужные формулы на откидное крыло доски, чтобы они были перед глазами учеников весь урок.

**Прогрессия** - это последовательность чисел, обладающая оп­ределенными свойствами. Она может быть возрастающая или убывающая. Если каждый следующий член прогрессии больше (или меньше) предыдущего на какое-то число (его называют «шаг прогрессии» или «разность прогрессии»), то имеем прогрес­сию арифметическую:

а1, а2, а3, а4, а5, ... аn.

при этом а2 = а1 + d; а3 = а2 + d; а4 = а3 + d, аn = а1 + d (n - 1);

Для арифметической прогрессии справедливо равенство:

an – 1 + an + l = 2an.

Сумма арифметической прогрессии подсчитывается по формуле:



Если каждый следующий член прогрессии больше (или мень­ше) предыдущего в какое-то число раз (его называют «шаг про­грессии» или «знаменатель прогрессии»), то имеем прогрессию геометрическую:

 b1, b2, b3, b4, b5,…bn

при этом b2 = b1\*q; b3 = b2\*q; bn = b1\*qn-1

Для геометрической прогрессии справедливо равенство:

bn-1\*bn+1 = bn2.

Сумма геометрической прогрессии подсчитывается по формуле:

 

Для бесконечно убывающей прогрессии, где |q| < 1 имеет ме­сто формула суммы: .

Далее рассматриваются задания на нахождение элементов про­грессий. Первые два задания могут быть рассмотрены на доске, чтобы восстановить способы действий при решении соответст­вующих заданий. Остальные задания могут быть предложены школьникам как для групповой, так и для индивидуальной работы. Проверка может быть проведена через компьютер или посредством использования листов самопроверки. Для более самостоятельных школьников предусмотрены дополнительные задания. Эти задания также могут быть предложены для домашней работы.

Задачи на прогрессии могут быть предложены в заданиях ЕГЭ не только в прямой форме (в форме легко узнаваемой задачи на прогрессию), но и могут быть «замаскированы» под текстовую задачу. В этой связи на данном уроке рассматривается несколько таких текстов с целью показать школьникам, что задачи на про­грессию могут быть оформлены и таким образом (поскольку в учебниках текстов такого вида в соответствующем разделе мате­матики 9-го класса не попадалось).

***Задания:***

1) Найти первый член арифметической прогрессии и ее разность, если сумма первого и пятого члена прогрессии равна 22, а сумма первых десяти членов равна 210.

2) Найти первый член геометрической прогрессии и ее знаменатель, если сумма первого и второго члена равна 8, а сумма пер­вого и четвертого - равна 56.

3) Сумма трех членов убывающей арифметической прогрессии равна 21. Если первый член увеличить на 6, а второй - увеличить на 1, то полученные числа образуют геометрическую про­грессию. Найти члены исходной арифметической прогрессии.

4) Найти пятый член арифметической прогрессии, если известно, что сумма первых трех членов - равна 15, а разность четвертого и девятого членов равна 9.

5) Найти сумму первых шести членов геометрической прогрессии, если второй ее член равен 2, а пятый - 16.

6) Найти знаменатель возрастающей геометрической прогрессии, если известно, что сумма третьего и пятого членов равна 30,а их произведение равно 81.

7) Найти сумму первых 11 членов арифметической прогрес­сии, если известно, что ее второй член равен 4, а пятый - 16.

***Разбор заданий:***

1) Из условия известно, что

 а1 + а5 = 22  а1 + а1 + 4d = 22  а1 + 2d = 11 

 S10 = 210  2a1 + 9d = 42

a1 = 11 – 2d

2(11-2d) + 9d = 42

22 – 4d + 9d = 42; 5d = 20

d = 4; a1 = 3.

 Ответ: d = 4; a1 = 3.

2) Из условия известно, что

 b1 + b2 = 8  b1 + b1\*q = 8  b1(1 + q) = 8

 b1 + b4 = 56 b1 + b1\*q3 = 56 b1(1+ q3) = 56.

Разделим второе уравнение на первое почленно:

1 – q + q2 = 7  q2 – q – 6 = 0.

Корни этого уравнения по теореме Виета: 3 и -2, значит q = 3, либо

 q = -2.

Тогда 

Ответ: Если q = 3, то b1’= 2 . Если q = - 2, то b1’’ = -8.

3) Из условия известно, что а + (а + d) + (а + 2d) = 21. Если провести указанные в условии добавления, то получим числа ви­да:

(а + 6); (а + d + l);(a + 2d), которые образуют геометрическую прогрессию. Известно, что для геометрической прогрессии спра­ведливо равенство: bn-1\*bn+1 = bn2. Используем его для данного условия:

 a + (a + d) + (a + 2d) = 21  3a + 3d = 21  a + d = 7, a+d+1=8

 (a + d + 1)2 = (a + 6)(a + 2d) 64 = (a + 6)(a + 2d)

 64=(7-d+6)(7+d) 64=(13-d)(7+d)

 91 + 13d - 7d - d2 - 64 = 0

 d2 – 6d – 27 = 0

 d = 9 или d = -3.

Поскольку в условии сказано, что арифметическая прогрессия убывающая, то d = 9 не удовлетворяет условию. Значит, d = - 3. Тогда, а= 10.

Ответ: исходные числа 10, 7, 4.

4) Из условия известно:

 a1 + a2 + a3 = 15  a1 + a1 + d + a1 + 2d = 15

 a4 – a1 = 9 a1 + 3d – a1 = 9

 d = 3; 3a1 + 3d = 15;

 a1 + d = 5; a1 = 5 – d = 2.

a5 = a1 + 4d = 2 + 12 = 14

Ответ: а5 = 14.

5) Из условия известно,

 b2 = b1\*q = 2  b1 = 

что b2 = 2 

 b5 = 16 b5 = b1\*q4 = 16   

 2q3 = 16  q3 = 8  q = 2

S6 = 

 Ответ: S6 = 63.

6) Из условия известно, что

 b3 + b5 = 30

 b3\*b5 = 81

для упрощения решения введем замены: b3 = x, b5 = y, тогда

 x + y = 30  x = 30 – y

 x\*y = 81 (30 – y)\*y = 81

 30y – y2 – 81 = 0; y2 – 30y – 81 = 0; y = 27 или y=3;

 тогда х = 3 или х = 27

 b3 = x  b3 = 3 поскольку b3 = b1\*q2, b5 = b1\*q4, сделаем замену:

 b5 = y  b5 = 27

 b1\*q2 = 3

 b1\*q4 = 27

подставим первое уравнение во второе: 3\*q2 = 27 q2 =9  q=±3.

В условии сказано, что прогрессия возрастающая, значит q = 3.

7) Из условия известно, что a2 = 4  a2 = a1 + d = 4

 a5 = 16 a5 = a1 + 4d = 16

 -3d=-12; d=4  a1 = 0

 

Ответ: S11 =220.

Приведем несколько примеров заданий на профессии в виде текстовых задач:

**Дополнительные задания:**

1) Планируя выпуск нового электронного прибора, экономи­сты предприятия определили, что в первый месяц может быть из­готовлено 200 приборов. Далее предполагалось ежемесячно уве­личивать выпуск на 20 изделий. За сколько месяцев предприятие сможет изготовить по этому плану 11 000 приборов?

2) В соревновании по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получал штрафные очки: за первый промах одно штрафное очко, а за каждый последующий - на ½ очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков?

3) Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800
м, а каждый следующий час поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты в 5700 м?

**Разбор заданий:**

1) Поскольку нарастание числа выпускаемых приборов про­исходило постоянно на определенное число, имеем арифметиче­скую прогрессию. Пусть а1 = 200, тогда d = 20. Известно, что Sn = 11 000, где n - число месяцев. Применим известную формулу:



Используем свойство пропорции: 400n+ 20n2 – 20n = 22 000 -приведем подобные и сократим уравнение: n2 + 19n - 1100 = 0

 

Поскольку число месяцев не может быть отрицательным, вер­ный ответ: n1 = 25.

Примечание: Эта задача содержалась в демонстрационном ва­рианте 2003 г. и, как показал опыт, часть школьников успешно решила ее простым подбором, не обращаясь к формулам про­грессий. А поскольку в разделе В важен только ответ, такой спо­соб решения вполне приемлем.

2) Поскольку нарастание штрафной суммы очков происходи­ло постоянно на определенное число, имеем арифметическую прогрессию. Пусть а1 = 1, тогда d = ½ . Известно, что стрелок на­брал штрафную сумму Sn = 7, где n - число промахов. Применим известную формулу:

 

Используем свойство пропорции.

 2n + ½ n2 – ½ n = 14 - умножим уравнение на 2, получим:

 4n + n2 – n = 28

 n2 + 3n – 28 = 0 - его корни по теореме Виета: 4 и -7. По­скольку число промахов не может быть отрицательным, верный вариант и = 4. Всего выстрелов было 25, значит, попаданий было 25-4 = 21.

3) Поскольку уменьшение происходило последовательно и постоянно на определенное количество метров, имеем арифметическую профессию. Пусть а1 = 800, d = -25. Известно, что Sn =5700. Применим известную формулу:

 

Раскрывая скобки и приводя подобные, получим: n2 – 65n + 456 = 0

Вычисляя корни при помощи дискриминанта, получаем два значения: 57 и 8. Ответ 57 нереален в условиях данной задачи, значит, верный ответ: за 8 часов.

**Приложение 3.**

**Тема урока: "Геометрическая прогрессия"**

**Тип урока:** Изучение нового материала, в основе которого лежит самостоятельная умственная деятельность учащихся.

**Продолжительность:** 40 минут

**Аннотация:** Урок следует после изучения арифметической прогрессии и на базе имеющихся у учащихся знаний. Материал представлен в форме презентации. В основу изложения взята сказка и идея шотландского математика Джона Непера. Выбранная форма позволит учащимся самостоятельно получить формулы геометрической прогрессии и доказать их. Результатом деятельности учащихся должно стать умение в стандартных задачах применять формулы, определения знаменателя прогрессии, n–ого члена прогрессии.

**Цели урока:**

* *Образовательные*: Познакомить учащихся с понятием геометрическая прогрессия, формулой n–ого члена, знаменателя. Развить у учащихся умение применять данные знания при решении задач.
* *Развивающие*: Развить умения учебно-позновательной деятельности. Умение работать самостоятельно.
* *Воспитательные*: Способствовать воспитанию настойчивости в достижении результатов обучения, применять добытые знания в практической деятельности.
* *Интеграция*: математика, информатика, биология, фольклор.

**Формы работы:** индивидуальная, коллективная, работа в парах.

**Оборудование:** компьютер, доска, мел, опорные карты.

|  |
| --- |
| **Содержание урока**  |
| Содержание материала | Деятельность учителя | Деятельность учеников |
| Организационный момент | Русская народная сказка «Лисичка-сестричка и волк».Наловил дед рыбы полный воз. Рыба - крупные лещи. Едет домой и видит, лисичка свернулась калачиком лежит на дороге. Дед решил, что она мертвая.Вот славная находка! Будет моей старухе воротник на шубу. А лиса улучшила время и стала выбрасывать полегоньку из воза все по рыбке да по рыбке. В первую минуту - 1 леща, во вторую–2-х, в третью-4-х , а в четвертую-8-х.Сколько лещей она выкидывала в пятую, шестую, седьмую минуты.Составьте последовательности.Какую закономерность вы заметили?Среди последовательностей, выберите те, которые подчиняются этому закону:1,2,3,4,5…5,5,5,5,5…2,4,8,16,32…-1,3,-9,27…3,5,7, 9….Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго равен предыдущему, умноженному на одно и тоже числоназывается геометрической прогрессией. | 1,2,4,8,16.32.64.Каждый член числовой последовательности отличается от предыдущего умножением на одно и тоже число |
| Актуализация знаний | Вы изучили арифметическую прогрессию. Давайте повторим. Отвечаем только нет, да. |   |
| 1) Последовательность, каждый член которой больше предыдущей называется арифметической прогрессией. | нет |
| 2) Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго равен сумме предыдущего и одного и того же числа, называется арифметической прогрессией | да |
| 3) d- разность арифметической прогрессии4) d = а3 - а15) d = а2 – а1 | данетда |
| 6) аn = а1 + d (n-1) - формула n-ого члена арифметической прогрессии | да |
| 7) а7= а1+6d8) 23 =69) 2 4= 1610) 33 = 911) 33 = 27 | данетданетда |
| Мотивация учебной деятельности | Я приглашаю вас в этот удивительный мир геометрической прогрессии.Цели урока:Образовательные: Познакомиться с понятием геометрическая прогрессия, формулой n–ого члена, знаменателя. Сформировать умение применять данные знания при решении задач.Развивающие: Развить умения учебно-позновательной деятельности. Умение работать самостоятельно.Воспитательные: Способствовать воспитанию настойчивости в достижении результатов обучения. Применять добытые знания в практической деятельности. |   |
| Исторический материал | Слово (прогрессия) латинского происхождения, означает движение вперед и встречается впервые у римлян в V- V1 вв. Некоторые формулы прогрессии были известны китайским и индийским математикам еще до н.э. Шотландскому математику Джону Неперу принадлежит идея о том, что от свойств арифметической прогрессии можно перейти к аналогичным свойствам геометрической прогрессии с положительными членами, если сложение и вычитание соответственно заменить умножением и делением, а умножение и деление – возведение в степень и извлечение корня. После такой замены остаются в силе не только формулировки свойств, но и доказательства. Проверим принципы Непера на практике . |   |
| Восприятие и осознание учащимся нового материала | Каждому я раздала опорные карты, примените идею Непера и запишите формулы нахождения знаменателя и n-ого члена геометрической прогрессииan =a1 +(n -1) dd = а n– аn-1Докажем эти формулы: | bn = b 1 gn-1g = bn :bn-1Рассмотрим геометрическую прогрессию:в1, в2, в3, в4,…Учащиеся доказывают формулу n-ого члена |
| Закрепление | Закрепим изученное: Даны геометрические прогрессии. Найдите правильный ответ.А)1; 3; 9;…Б) 3; 3/2, ¾…В) 8; 8; 8;Г) 2, -2, 2,….\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2;-2;2…. | g=3, в4 =27

|  |  |
| --- | --- |
| g = 1|2,g = 1g = -1  | в4=3/8в 4= 8в4 = -2 |

  |
|   | Составить формулу n-ого члена геометрической прогрессии.1) 2,4,8,16…..2) 5, 10, 20, 40, ….3) 1, ½,1/4,1/8 | Вn = 2\* 2n-1 Вn=5\* 2n-1Вn- = 1\*(1/2)n-1 |
|   | Составьте геометрические прогрессии:1;8;9;16;27;5;9;2;20;9;2;4;9;10;3;40 | 1;3;9;27..5;10;20;40..16;8;4;2…9;9;9;9… |
|   | Даны геометрические прогрессии. Известно:1) в1= 1 /4 g=1\2, найти в3-?2) в1=2 g=3, найти в4-?3) в1=3 g=-2, найти в3-? | в3=1/16в4=54в3=12 |
|   | 4) в1=2 g=-1\2, найти в4-? |
|   | Дана геометрическая прогрессия:в1; в2; в3 ………….Известно: чтов7=7/32, в1=14, найти знаменатель? | g=1/2 |
| Работа в парах | Составьте геометрическую прогрессию: |   |
| 1) Ежедневно каждый болеющий гриппом может заразить четырех окружающих. | 1;4;16;64;… |
| 2) Дима на перемене съел булочку. Во время еды в кишечник попало 30 дизентерийных палочек. Через каждые 20 минут происходит деление бактерий (они удваиваются). | 30;60;120;240;… |
| 3) Каждый курильщик выкуривает в среднем 8 сигарет в сутки. После выкуривания одной сигареты в легких оседает 0,0002 грамма никотина и табачного дегтя. С каждой последующей сигаретой это количество увеличивается в два раза. | 0,0002;0,0004;0,0008;… |
| Домашнее задание | Придумать или найти задачи позволяющие использовать геометрическую прогрессию. |   |
|   | Какие последовательности в нашей жизни происходят? | Дни недели, возраст человека, название месяцев, нумерация домов, и т.д. |
|   | Является ли число ¼ членом геометрической прогрессией 8;4;2….. | Да |
|   | 2)Впишите пропущенные члены геометрической прогрессии\_\_\_;1;4;\_\_\_64;…4;\_\_\_;36;108.. | ¼;1612 |
|   | Поставьте оценку за урок, используя изученную тему.  | 5, 5, 5, 5 и т.д. |

|  |
| --- |
| **Опорная карта**  |
| Арифметическая прогрессия | Геометрическая прогрессия |
| d = а n– аn-1 | g =  |
| an =a1 +(n -1) d | bn =  |